1.6.5 Mocniny s celým mocnitelem I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Nečekám, až bude mít celá třída oba první příklady. Poté, co většina pomalejších dokáže dopočítat první příklad, jdeme na příklad 3.

Př. 1: Vypočti $\left(\frac{4x^2y^3}{2xy^2}\right)^3 \cdot \frac{8(3xy^2)^3}{(2xy^3)^2}$. Dodržuj KISS.

$$\left(\frac{4x^2y^3}{2xy^2}\right)^3 \cdot \frac{8(3xy^2)^3}{(2xy^3)^2} = (2xy)^3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3^3 x^3 y^6}{2^2 x^2 y^6} = 2^3 x^3 y^3 \cdot 2 \cdot 3^3 x = 2^4 \cdot 3^3 x^4 y^3$$

Př. 2: Vyjádři pomocí mocnin prvočísel výraz $\left(\frac{15^2 \cdot 6^2 \cdot 8}{10 \cdot 4^2}\right)^3 : \left(\frac{4^3 \cdot 9^2}{12^3 \cdot 6}\right)^2$. Dodržuj KISS.

$$\left(\frac{15^2 \cdot 6^2 \cdot 8}{10 \cdot 4^2}\right)^3 : \left(\frac{4^3 \cdot 9^2}{12^3 \cdot 6}\right)^2 = \left(\frac{[3\cdot 5]^2 \cdot [2 \cdot 3]^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 5 \cdot [2^2]^2}\right)^3 : \left(\frac{[2^2]^3 \cdot [3^2]^2}{[2^2 \cdot 3]^3 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3}{2 \cdot 5 \cdot 2^4}\right)^3 : \left(\frac{2^6 \cdot 3^4}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = (3^4 \cdot 5)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3^{12} \cdot 5^3 \cdot 2^2$$

Př. 3: Které z následujících dvou pravidel je matematicky hezčí?
a) Pro každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
b) Pro každé $a \in R$, $a \neq 0$ a $r, s \in N$, $r > s$ platí: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Základní požadavek na krásu matematického pravidla: Musí být co nejobecnější s minimem výjimek $\Rightarrow$ pravidlo pro podíl mocnin moc krásy nepobralo: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, platí když $r > s$ (ošklivá podmínka).

Použití pravidla pro podíl je jasné, například: $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Nemohli bychom ho upravit tak, aby fungovalo vždy a podmínku jsme mohli vypustit?
Zkusíme, co se děje, když podmínka $r \leq s$ neplatí.

Zkusíme $r = s$**.**
Podle pravidla: Podle významu mocniny

$\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0$.

$\frac{a^r}{a_r} = \frac{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)} = 1$ všechno se pokrátí, nahoře i dole je a r-krát.

Pokud má být matematika bezesporná, musíme oběma způsoby získat stejný výsledek $\Rightarrow$ platí: $a^0 = 1$.

Není to úplně nerozumné, mocnitel říká, kolikrát se a opakuje v součinu, když je mocnitel 0, nebude a v součinu ani jednou a zůstane tam pouze jednička (kterou můžeme připsat do jakéhokoliv součinu, aniž by ho změnila).

Zatím to vypadá, že platí: $\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r} = a^0 = 1$.

Zkusíme $r < s$ (konkrétní hodnoty).

Podle pravidla:

$\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$

Podle významu mocniny

$\frac{a^3}{a^7} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}$

Pokud má být matematika bezesporná, musíme oběma způsoby získat stejný výsledek $\Rightarrow$ platí: $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$.

Opět je to docela rozumné, mocnitel říká, kolikrát se a opakuje v součinu. Když mocnitel zmenšujeme, ubývá a v součinu (je to stejné jako bychom počet a v součinu neměnili, ale součin zapsali do zlomku, ve kterém budeme postupně přidávat a do jmenovatele). Pokud bude mocnitel menší než nula, musí v být součinu a méně než žádné $\Rightarrow$ a se objeví ve jmenovateli.

Zkusíme $r < s$ (obecně).

Podle pravidla:

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ ($r - s < 0$ -záporné číslo)

Podle významu mocniny

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{r \cdot krát}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s \cdot krát}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s-r \cdot krát}} = \frac{1}{a^{s-r}}$$

($s - r > 0$, kladné číslo, opačné k $r - s$)

Získali jsme stejný výsledek jako před chvíli: musí platit $a^{r-s} = \frac{1}{a^{s-r}} = \frac{1}{a^{-(r-s)}}$

Závěr: Vzorec $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ můžeme používat vždy (tedy bez podmínky), pokud zavedeme $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (obecně $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $a \neq 0$).

Pro všechna $a \in R$, $a \neq 0$ platí $a^0 = 1$.

Pro každé $a \in R$, $a \neq 0$ a pro každé $m \in N$ platí: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (např. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$).

Pedagogická poznámka: Doporučuji žákům, aby si význam záporného exponentu raději pamatovali na konkrétním příkladu $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ než na obecném vzorci $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, ze kterého nejsou znaménka bez předchozí podmínky zcela zřejmá).

Př. 4: Vyjádři jako zlomek.

a) a^{-2} b) 10^{-2} c) 3^{-1} d) 2^{-4}

a) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

b) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$

c) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

d) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Př. 5: Odstraň mocninu.

a) 2^{-2} b) $(-2)^{-2}$ c) $(-2)^{-3}$ d) 2^{-3} e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4}$

a) $2^{-2} = \frac{1}{4}$

b) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

d) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

e) $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ nebo jinak $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ **Záporné znaménko v exponentu neovlivňuje znaménko mocniny, o znaménku rozhoduje znaménko základu mocniny a sudost nebo lichost exponentu.**

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, část studentů pravidelně považuje záporné mocniny za záporná čísla. Podle definice je to zjevný nesmysl, ale oni neuvažují podle definic a pravidel.

Př. 6: Zapiš jako mocninu prvočísla.

a) 49 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{32}$

a) $49 = 7^2$

b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

c) $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$

d) $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

Všechny vzorce pro mocniny s přirozeným mocnitelem platí i pro celočíselné mocnitele.

Př. 7: Vynechej v sešitě řádku a pak sepiš z paměti bez obracení stránek v sešitu všechny vzorce pro výpočty s mocninami. Jak si vzorce lépe zapamatovat?

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$\left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$

$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Lépe se pamatují věci, které spolu souvisí, nebo souvisí s něčím, co už známe.
Máme dvě dvojice vzorců:

- pro násobení a dělení: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ a $a^r : a^s = a^{r-s}$ (v každém vzorci vystupuje dvojice svázaných operací: násobení se sčítáním, dělení s odčítáním).
- pro odstranění závorky při násobení a dělení: $\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$ a $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Dosud jsme u uvedených vzorců předpokládali, že exponenty mohou být pouze přirozená čísla. Úvaha z úvodu dnešní hodiny nám umožňuje pracovat v exponentu i se zápornými čísly $\Rightarrow$ všechny vzorce platí pro celá (tedy i záporná) čísla v exponentu.

Pro každá dvě reálná čísla *a, b* a pro každá dvě celá čísla *r, s* (tudíž i záporná) platí:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **Je-li** $a \neq 0$**, pak** $a^r : a^s = a^{r-s}$

$\left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$

$\left(a \cdot b\right)^r = a^r \cdot b^r$ **Je-li** $b \neq 0$**, pak** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Př. 8: Vyjádři co nejjednodušeji jako kladnou mocninu čísla většího než jedna.
a) $0{,}5^{-5}$ b) $0{,}02^{-3}$ c) $0{,}04^{-2}$

a) $0{,}5^{-5} = \left(\frac{5}{10}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 2^5$

b) $0{,}02^{-3} = \left(\frac{2}{100}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{50}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1^3}{50^3}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{50^3}} = 50^3$

c) $0{,}04^{-2} = \frac{1}{0{,}04^2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{100}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{25}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1^2}{25^2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{25^2}} = 25^2$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad (pro většinu studentů je těžké pochopit zadání) je vyrovnávací, většině třídy jenom ukážu bod a) a pokud není dost času, jdeme rovnou na příklad 7.

Pedagogická poznámka: Ještě než pustíte žáky na následující příklad, musíte spočítat na tabuli pár ukázek, ve kterých použijete záporný exponent. V opačném případě žáci budou při výpočtech záporné exponenty obcházet, čímž jejich zavedení ztrácí své kouzlo.

Záporné exponenty můžeme ve výpočtech používat naprosto stejně jako přirozené.

- $2^{-3} \cdot 2^{5} = 2^{-3+5} = 2^{2}$
- $\left(a^{2}\right)^{-3} = a^{2\cdot(-3)} = a^{6}$
- $\dfrac{3^{-1} \cdot 3^{4}}{3^{2} \cdot 3^{-1}} = 3^{-1+4-2-(-1)} = 3^{2} = 9$

Př. 9: Zjednoduš a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina.

a) $3^{-15} \cdot 3^{23}$ b) $\left(2^{7}\right)^{-3}$ c) $\dfrac{4^{8}}{4^{-12}}$ d) $\left(2x\right)^{-4}$ e) $\dfrac{2^{-6}}{2^{5}}$

f) $\dfrac{a^{-3} \cdot a^{6}}{a^{5} \cdot a^{-4}}$ g) $\left(\dfrac{2}{a^{3}}\right)^{-2} \cdot \dfrac{\left(a^{-2}\right)^{3}}{\left(2a\right)^{2}}$ h) $\dfrac{2}{a^{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{a^{2}}\right)^{2} \cdot \left(\dfrac{2}{a^{3}}\right)^{-3}$

a) $3^{-15} \cdot 3^{23} = 3^{-15+23} = 3^{8}$

b) $\left(2^{7}\right)^{-3} = 2^{7\cdot(-3)} = 2^{-21} = \dfrac{1}{2^{21}}$

c) $\dfrac{4^{8}}{4^{-12}} = 4^{8-(-12)} = 4^{8+12} = 4^{20}$

d) $\left(2x\right)^{-4} = 2^{-4} \cdot x^{-4} = \dfrac{1}{16x^{4}}$

e) $\dfrac{2^{-6}}{2^{5}} = 2^{-6-5} = 2^{-11} = \dfrac{1}{2^{11}}$

f) $\dfrac{a^{-3} \cdot a^{6}}{a^{5} \cdot a^{-4}} = a^{-3+6-5-(-4)} = a^{2}$

g) $\left(\dfrac{2}{a^{3}}\right)^{-2} \cdot \dfrac{\left(a^{-2}\right)^{3}}{\left(2a\right)^{2}} = \dfrac{2^{-2}}{a^{-6}} \cdot \dfrac{a^{-6}}{2^{2}a^{2}} = 2^{-2-2} \cdot a^{-6-(-6)-2} = 2^{-4}a^{-2} = \dfrac{1}{2^{4}a^{2}}$

h) $\dfrac{2}{a^{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{a^{2}}\right)^{2} \cdot \left(\dfrac{2}{a^{3}}\right)^{-3} = \dfrac{2}{a^{3}} \cdot \dfrac{1}{a^{4}} \cdot \dfrac{2^{-3}}{a^{-9}} = \dfrac{2^{1-3}}{a^{3+4-9}} = \dfrac{2^{-2}}{a^{-2}} = \dfrac{a^{2}}{2^{2}}$

Př. 10: Zjednoduš a výsledek zapiš tak, aby se v něm nevyskytovala záporná mocnina.

a) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{3}}\right)^{-2}$ b) $\left(\dfrac{a^{2}}{b^{3}}\right)^{-2} \cdot \dfrac{\left(a^{-2} \cdot b\right)^{3}}{\left(ab\right)^{-2}}$ c) $\left(a^{2}b\right)^{-2} \cdot \left(a^{-3}\right)^{-2} \cdot b^{4}b^{-3}$

a) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{3}}\right)^{-2} = \dfrac{a^{4}}{b^{-6}} = a^{4}b^{6}$

b) $\left(\dfrac{a^{2}}{b^{3}}\right)^{-2} \cdot \dfrac{\left(a^{-2} \cdot b\right)^{3}}{\left(ab\right)^{-2}} = \dfrac{a^{-4}}{b^{-6}} \cdot \dfrac{a^{-6} \cdot b^{3}}{a^{-2}b^{-2}} = \dfrac{a^{-10} \cdot b^{3}}{a^{-2}b^{-8}} = a^{-8}b^{11} = \dfrac{b^{11}}{a^{8}}$

c) $\left(a^2b\right)^{-2}\cdot\left(a^{-3}\right)^{-2}\cdot b^4b^{-3}=a^{-4}b^{-2}\cdot a^6\cdot b=a^2b^{-1}=\frac{a^2}{b}$

Pedagogická poznámka: Náplní zbytku hodiny je samostatné počítání příkladů ze sbírky nebo z Petákové.

Př. 11: Sbírka příklad 9
Sbírka příklad 8 a) b) c) d) e)

Př. 12: Petáková:
strana 62/cvičení 37 b) f)
strana 62/cvičení 39 b) d) e) f)
strana 62/cvičení 40
strana 62/cvičení 42 a) b) d) e) g)

Shrnutí: Lépe a obecněji se nám počítá, když zavedeme, že platí $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$.